INSPECTORATUL
ŞCOLAR
JUDEŢEAN
ARGEŞ

MINISTERUL
EDUCAŢIEI
CERCETĂRII
TINERETULUI
ŞI SPORTULUI

Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 11 februarie 2012
Clasa a VIII-a
Soluţii şi barem

Varianta 2

1. a) Inegalitatea devine: $k^4+k^2+1\geq 3k^2 \Leftrightarrow k^4-2k^2+1\geq 0 \Leftrightarrow \left(k^2-1\right)^2\geq 0$, adevărată, cu egalitatea pentru k=1. .... 2p

b) Ţinând cont de a) pentru k>0 şi k$\neq$1 avem

$$\frac{1}{k}>\frac{3k}{k^4+k^2+1}=\frac{3k}{\left(k^2-k+1\right)\left(k^2+k+1\right)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right),\ \text{..........}\ \ 2\text{p.}$$

Substituind k = 2, 3, ……, n şi prin sumarea inegalităţilor obţinem :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.........+\frac{1}{n}>\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{13}}+\cancel{\frac{1}{13}}-\cancel{\frac{1}{21}}+........+\cancel{\frac{1}{n^2-n+1}}-\frac{1}{n^2+n+1}\right),\ 2\text{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{n}-\frac{n^2+n-2}{2\left(n^2+n+1\right)}>0,\ \text{...}\ \ 1\text{p.}$$

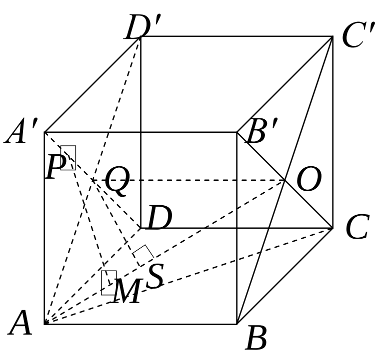
2. Aplicăm inegalitatea mediilor şi obţinem:

$\frac{x+2}{2}\geq\sqrt{2x} \Leftrightarrow x+2\geq 2\sqrt{2x}$, x > 0 .... 2 puncte

Analog: $2y+3\geq 2\sqrt{6y}$, y > 0, $3z+4\geq 2\sqrt{12z}$, z > 0. .... 2 puncte

Înmulţirea relaţiilor membru cu membru .... 2 puncte

Obţinerea relaţiei cerute 1p



3. a) $\left.\begin{array}{l}AC=AB\sqrt{2}\Rightarrow AC=a\sqrt{2}\\ A'B=AB\sqrt{2}\Rightarrow AB'=a\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow [AC]\equiv[AB']$

Cum $\left.\begin{array}{l}[AC]\equiv[AB']\\ [OC]\equiv[OB']\end{array}\right\}\Rightarrow AO\perp B'C$

Cum $\left.\begin{array}{l}A'B'\parallel DC\\ [A'B']\equiv[DC]\end{array}\right\}\Rightarrow A'B'CD$ paralelogram $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow B'C\parallel A'D\\ AO\perp B'C\end{array}\right\}\Rightarrow AO\perp A'D.$

b) Notăm $A'D$ 3 $AD' = \{O\}$. Ducem $QS \perp AO;\ S \in AO$.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Cum } A'D \perp AD' \\ A'D \perp AO\end{array}\right\} \Rightarrow A'D \perp (D'AO) \\ QS \subset (D'AO)\end{array}\right\} \Rightarrow A'D \perp QS \Rightarrow QS \perp A'D.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cum } QS \perp A'D \\ QS \perp AO\end{array}\right\} \Rightarrow QS \text{ perpendiculara comună a dreptelor } A'D \text{ şi } AO \Rightarrow MP \geq QS.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cum } OB' \square QA' \\ OB' = QA' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow A'B'OQ \text{ paralelogram} \Rightarrow \begin{cases} OQ = A'B' = a \\ OQ \square A'B' \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Cum } A'B' \perp (A'AD) \\ OQ \square A'B'\end{array}\right\} \Rightarrow OQ \perp (A'AD) \\ A'D \subset (A'AD)\end{array}\right\} \Rightarrow OQ \perp A'D \Rightarrow m(OQA) = 90^\circ.$$

$$QA = \frac{a\sqrt{2}}{2};\quad AO^2 = QA^2 + OQ^2 = \frac{2a^2}{4} + a^2 = \frac{6a^2}{4} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cum } m(OQA) = 90^\circ \\ QS \perp AO\end{array}\right\} \Rightarrow QS = \frac{QA \cdot OQ}{AO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\,\cancel{\sqrt{2}}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{a}^{1} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{a}_{1}\,\cancel{\sqrt{6}}_{\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow QS = {}^{\sqrt{3})}\dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow QS = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ MP \geq QS\end{array}\right\} \Rightarrow MP \geq \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

<u>Barem de notare</u>

a) Arată că $AO \perp B'C$ 1p
Arată că $A'D \square B'C$ 1p
Finalizare $AO \perp A'D$ 1p
b) Duce $QS \perp AO$, $\{O\} = A'D$ 3 AD' şi $S \in AO$ 1p
Arată că $QS \perp A'D$ 1p
QS perpendiculara comună pentru AO şi $A'D \Rightarrow MP \geq QS$ 1p
Calculează lungimea lui QS şi finalizează. 1p

TOTAL 7p

4. a) $\sin D\hat{C}A = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow DC = \dfrac{AD}{\sin D\hat{C}A}$

$\sin E\hat{C}B = \dfrac{BE}{EC} \Rightarrow EC = \dfrac{BE}{\sin E\hat{C}B}$ .... 1p.

$$DC^2 + EC^2 = \frac{AD^2}{\sin^2 D\hat{C}A} + \frac{BE^2}{\sin^2 E\hat{C}B}$$

$\Leftrightarrow ED^2 = \left(\dfrac{AD}{\sin D\hat{C}A}\right)^2 + \left(\dfrac{BE}{\sin E\hat{C}B}\right)^2 \geq 2\cdot\dfrac{AD}{\sin D\hat{C}A}\cdot\dfrac{BE}{\sin E\hat{C}B}$, ... 1p

deci $AD\cdot BE \leq \dfrac{1}{2}ED^2 \sin D\hat{C}A \cdot \sin E\hat{C}B$. .... 1p.

b). Trebuie să aplicăm de mai mute ori teorema lui Pitagora. Pentru început,avem:
$CD^2 = AD^2 + AC^2$, $CE^2 = BE^2 + BC^2$ şi $CD^2 + CE^2 = DE^2$. 1p

Atunci $AC^2 + BC^2 + AD^2 + BE^2 = DE^2$. 1p

Construiesc dreptunghiul $BADD'$.

Atunci $DE^2 = DD'^2 + D'E^2 = AB^2 + (AD+BE)^2$, ... 1p

Din aceste relații avem: $AC^2 + BC^2 + AD^2 + BE^2 = AB^2 + (AD+BE)^2 =$
$AB^2 + AD^2 + BE^2 + 2AD\cdot BE$, de unde rezultă: $AD\cdot BE = \dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2}$. 1p